UNITĂȚI DE MĂSURĂ
ȘI
TRANSFORMAREA MĂSURILOR

DE

N. N. BOTEZ

Extras din revista «NATURA» No. 4/1934

1 9 3 4

TIPOGRAFIA «BUCOVINA» I. E. TOROUȚIU, BUCUREȘTI III

UNITĂŢI DE MĂSURĂ ŞI TRANSFORMAREA MĂSURILOR

O lege naturală scrisă într'o formulă matematică are cu adevărat valoare numai când cel care o cunoaşte se poate servi de ea pentru a face calcule.

Pentru aceasta însă este numaidecât nevoe să se cunoască nu numai mărimile (lungimi, forţe, iuţeli etc.) care intră în formulă ci şi unităţile de mă= sură şi modul de măsurare pentru fiecare mărime. De exemplu este ştiut că forţa centrifugă este dată de formula

$$(1)\ f = m\frac{v^2}{r}$$

in care *f* este forţa, *m* este masa corpuluiui care se roteşte, *v* iuţeala lineară a acestui corp şi *r* raza cercului descris de corp. Dar nu trebue uitat că această formulă este adevărată numai în sistemul *C. G. S.* şi orice alt sistem construit asemenea cu *C. G. S.* (adică aşa încât unitatea de forţă să fie aceia care dă unităţei de massă o mişcare cu acceleraţia unu).

Dacă sistemul *C. G. S.* ar fi singurul întrebuinţat lucrul ar fi mai simplu: am şti odată pentru totdeauna că formulele sunt în sistemul *C. G. S.*

Dar măsurile de toate zilele fiind mai obişnuite adesea n= servim şi de ele: forţele le spunem adesea în grame, iuţelile în metri pe secundă sau în km./oră. etc. Mai ales în electricitate se intâmplă acest lucru: calculele se fac uneori pe unităţi *C. G. S.* electrostatice, alte ori în *C. G. S.* electromagnetice, alte ori în sistemul practic internaţional (*volt*, *amper*, *ohm*, *farad*, *henry*).

Din această pricină se naşte nevoia de a şti cum se trece de la un fel de unităţi de măsură la un alt fel de unităţi.

O problemă care se pune astfel este aceasta:

I. — Cunoscând o formulă într'un sistem de unităţi şi presupunând că păstrăm aceeaş formă a formulei dar schimbăm toate unităţile de măsură a mărimilor din membrul al doilea se întreabă: ce număr şi ce fel de unitate va corespunde pentru mărimea din membrul întâi?

Răspunsul la amândouă aceste întrebări se dă prin acelaş raţionament şi de aceea le=am pus deodată într'o singură problemă.

Să luăm formula de mai sus. In sistemul *C. G. S.* lungimile se mă= soară cu *centimetrul*; massele cu *gramul=massă*; iuţelile cu *centimetrul pe secundă* (cm/sec); şi forţele cu *dyna* (şi se mai ştie dacă într'un loc oarecare acceleraţia căderii este gcm/sec^2 atunci un gram greutate în acel loc face g dyne).

Dar dacă măsurăm lungimile în metri, massele în kilograme, şi timpul în minute folosindu=ne tot de formula de mai sus atunci care va fi unitatea de forţă (cu alte vorbe câte dyne face unitatea de forţă aceasta nouă?).

Pentru a răspunde trebue să cunoaştem o teoremă ajutătoare care zice :

(Teoremă). Numerile N şi n care reprezintă aceeaş mărime când o măsurăm respectiv cu unitatea U_N şi U_n *sunt în raport invers cu mărimile unităţilor* U_N şi U_n .

De exemplu avem o lungime pe care o măsurăm odată cu centimetrul şi odată cu metrul. Putem afirma de mai înainte că oricare ar fi acea lungime, numărul de metri cari o măsoară va fi de o sută de ori mai mic decât numărul de centimetri, care măsoară aceeaş lungime (am afirmat de o sută de ori fiindcă metrul este de o sută de ori mai mare de cât centimetrul).

Pentru a nu face confuzie în cele ce urmează trebue să se ţie bine minte că raportul a două mărimi înseamnă raportul numerilor care reprezintă acele mărimi măsurate *cu aceeaş unitate.* In exemplul nostru raportul metrului către *cm* este 100 fiindcă metrul măsurat cu centimetrul face 100 cm. şi atunci raportul

este $\frac{100 \text{ cm.}}{1 \text{ cm.}} = 00.$

Teorema noastră este o consecinţă a unei reguli de trei simplă.

In adevăr zicem 1 metru . . . . . face . . . . . 100 cm.

N metri . . . . . fac . . . . . n cm.

$$n = N \times 100$$

de unde $$\frac{n}{N} = 100$$

Insă o sută nu este decât raportul între metru şi centimetru ; dacă în loc de metru zicem U_N (adică unitatea care corespunde lui N) şi în loc de centimetru U_n (adică unitatea care corespunde lui n) avem regula :

$$\frac{n}{N} = \frac{U_N}{U_n} \text{ sau } \frac{N}{n} = \frac{U_n}{U_N}$$

adică raportul numerilor care reprezintă *aceeaş mărime* este egal cu raportul invers al unităţilor cu care măsurăm acea mărime.

Această teoremă fiind demonstrată să ne întoarcem la formula noastră. Să însemnăm cu M massa când este măsurată cu kilogramul-massă (adică *numărul* kilogramelor); cu V iuţeala când măsurăm cu metrul şi cu minutul ; cu R lungimea razei în metri ; cu F forţa în unităţile cele noi (care pentru moment ne sunt necunoscute).

Aplicând formula vom avea :

$$(2)\ F = M.\frac{V^2}{R}$$

Impărţind egalitatea (2)cu (1) avem : $\frac{F}{f} = \frac{M}{m} \times \frac{V^2}{v^2} \times \frac{r}{R}$

Dar ţinând seama de teorema demonstrată avem :

$$\frac{F}{f} = \frac{U_m}{U_M} \times \left(\frac{U_v}{U_V}\right)^2 \times \frac{U_R}{U_r}$$

Unitatea U_m a fost gramul-massă ; unitatea U_M este kilogramul-massă ;

deci $\frac{U_m}{U_M} = \frac{1}{1000}$.

Pentru raportul $\frac{U_v}{U_V}$ mergem la definiția iuțelei. Iuțeala este spațiul împărțit la timp: (3) $v = \frac{l_0}{t}$ și (4) $V = \frac{L_0}{T}$. Formula întâi este pentru centimetri pe secundă și a doua pentru metri pe minut.

După teorema ajutătoare avem:

$$\frac{U_v}{U_V} = \frac{V}{v}$$

și din cauza relațiilor (3) și (4) $\frac{V}{v} = \frac{L_0}{l_0} \times \frac{t}{T}$.

Deci $$\frac{U_v}{U_V} = \left(\frac{L_0}{l_0}\right) \cdot \left(\frac{t}{T}\right) = \frac{U_{l_0}}{U_{L_0}} \times \frac{U_T}{U_t}$$

Unitatea U_l a fost cm.; unitatea U_L este metrul; $\frac{U_l}{U_L} = \frac{1}{100}$. Unitatea U_t a fost secunda; U_T este minutul; deci $\frac{U_T}{U_t} = 60$.

Atunci urmează că $\left(\frac{U_v}{U_V}\right)^2 = \left(\frac{60}{100}\right)^2 = \frac{3600}{10.000}$

In fine $\frac{U_R}{U_r} = \frac{\text{metru}}{\text{cm.}} = 100$.

Așa dar $\frac{F}{f} = \frac{1}{1000} \times \frac{3600}{10.000} \times 100 = 0{,}036$.

Am aflat astfel cum putem transforma orice număr de dyne în noile unități de forță și invers căci:

$$F = 0{,}036\ f \text{ și } f = \frac{1}{0{,}036} F$$

Se vede de altfel de pe acum că numărul F fiind mai mic ca f urmează că unitatea cea nouă de forță este mai mare ca dyna.

Pentru a ști exact mărimea unității noi, ne servim tot de teorema ajutătoare și scriem:

$$\frac{U_F}{U_f} = \frac{f}{F} = \frac{1000}{36} = 27{,}77$$

Așa dar unitatea cea nouă face 27,77 dyne.

Observație. Este de observat că socoteala pe care am făcut-o pentru $\frac{U_v}{U_V}$ adică pentru o mărime (iuțeală) derivată din mărimile fundamentale L și T (lungimea și timpul) o putem încorpora în formula forței centrifuge scriind

$$f = m.\frac{v^2}{r} = \frac{m}{r}.\left(\frac{l_0}{t}\right)^2 = \frac{m}{r} \times \frac{l_0^2}{t^2}$$

și $$F = M\frac{V^2}{R} = \frac{M}{R}.\frac{L_0^2}{T^2}$$

De unde $= \frac{F}{f} = \left(\frac{M}{m}\right) \cdot \left(\frac{r}{R}\right) \cdot \left(\frac{L_0}{l_0}\right)^2 \cdot \left(\frac{t}{T}\right)^2 = \left(\frac{U_m}{U_M}\right) \cdot \left(\frac{U_R}{U_r}\right) \cdot \left(\frac{U_{l_0}}{U_{L_0}}\right)^2 \cdot \left(\frac{U_T}{U_t}\right)^2$

$$\frac{F}{f} = \frac{1}{1000} \times 100 \times \frac{1 \times 1}{100 \times 100} \times \frac{60 \times 60}{1 \times 1} = \frac{36}{1000} = 0{,}036.$$

Această socoteală se mai poate simplifica dacă scriem ceea ce se chiamă *formula dimensiunilor*; adică zicem forța f se calculează înmulțind o masă m, cu o lungime la patrat l_o^2, și împărțind cu o lungime r și un timp la patrat t^2; însă o lungime la patrat este o suprafață și împărțită la o lungime face o lungime deci în loc de $\frac{l_o^2}{r}$ zicem o lungime l și atunci

$$f = \frac{m.\,l.}{t^2} \text{ sau (5) } f = [m].\,[l].\,[t^{-2}].$$

Parantezele se pun pentru a arăta că nu urmărim altceva în ultima formulă decât să arătăm că f se calculează înmulțind o massă, cu o lungime, și cu un timp la puterea minus doi. Tot așa va fi și cu unitățile metru, minut, kilogram; încât întrebuințând în acest caz literile majuscule vom avea

$$(6)\ F = [M].\,[L].\,[T^{-2}]$$

Dar m din (5) și M din (6) reprezintă una și aceiaș mărime măsurată în două feluri (cu două unități de măsură). Tot așa f și F etc.

Așa dar, după teorema ajutătoare:

$$\frac{F}{f} = \left(\frac{M}{m}\right) \times \left(\frac{L}{l}\right) \cdot \left[\frac{T}{t}\right]^{-2} = \left(\frac{U_m}{U_M}\right) \times \left(\frac{U_l}{U_L}\right) \times \left(\frac{U_t}{U_T}\right)^{-2}$$

In exemplul nostru: $\frac{U_m}{U_M} = \frac{1}{1000}$; $\frac{U_l}{U_L} = \frac{1}{100}$;

$$\left(\frac{U_t}{U_T}\right)^{-2} = \frac{1}{\left[\frac{U_t}{U_T}\right]^2} = \left[\frac{U_T}{U_t}\right]^2 = 3600.$$

Deci $\frac{F}{f} = \frac{1}{1000} \times \frac{1}{100} \times 3600 = \frac{36}{1000}$ adică exact acelaș rezultat.

De aici urmează regula: Dacă vrem să calculăm raportul a două numere F și f care reprezintă aceeaș mărime în două sisteme de unități, *când cunoaștem formula dimensiunilor*, facem așa: scriem formula dimensiunilor pentru ambele numere

$$F = M\,L\,T^{-2}$$
$$f = m.\ l.\ t^{-2}$$

și apoi facem raportul

$$\frac{F}{f} = \frac{M}{m} \times \frac{L}{l} \times \left(\frac{T}{t}\right)^{-2}$$

Apoi înlocuim fiecare raport din membrul doi cu raportul invers al unităților:

$$\frac{F}{f} = \frac{U_m}{U_M} \times \frac{U_l}{U_L} \times \left(\frac{U_t}{U_T}\right)^{-2}$$

Bine înțeles regula aceasta folosește numai când cunoaștem formula dimensiunilor; când n'o cunoaștem din memorie trebue să o stabilim ceea ce în definitiv revine tot la socoteala pe care am făcut-o întâi fără să amintim despre dimensiuni.

La prima vedere s'ar părea că aceste calcule sunt numeroase şi grele. Dar nu este aşa. Să se observe că sunt acelaş formule simple mânuite în felurite chipuri. Cine calculează trei—patru exemple le va stăpâni perfect şi va ajunge să le întrebuinţeze aproape automat.

Să mai luăm un exemplu. Capacitatea electrică a unui conductor este definită prin formula:

$$C = \frac{Q}{V}$$

în care Q sunt coulombi, V sunt volţi şi C sunt farazi.

Sau prin aceeaş formulă

$$c = \frac{q}{v}$$

în care q sunt unităţi electrostatice C. G. S. de cantitate, c de capacitate, şi v de potenţial. Pentru a trece de la C. G. S. la celelalte (la sistemul practic) vom scrie

$$\frac{C}{c} = \frac{Q}{q} \times \frac{v}{V} = \frac{U_q}{U_Q} \times \frac{U_V}{U_v}$$

Insă este cunoscut că un coulomb face 3×10^9 C. G. S. el. st.

Deci $$\frac{U_q}{U_Q} = \frac{1}{3 \times 10^9}$$

Şi un volt face $\frac{1}{300}$ C. S. G. el. st. Deci $\frac{U_V}{U_v} = \frac{1}{300}$

Atunci urmează $$\frac{C}{c} = \frac{1}{3.10^9} \times \frac{1}{300} = \frac{1}{3^2.10^{11}}$$

A-a dar numărul de coulombi este de $3^2.10^{11}$ ori mai mic ca cel de unităţi C. G. S. căci : $C = \frac{c}{3^2.\,10^{11}}$

De aici urmează că raportul unităţilor este invers :

$$\frac{U_C}{U_c} = \frac{c}{C} = 3^2.10^{11}$$

adică un farad face $3^2 \times 10^{11}$ de unităţi C. G. S. electrostatice.

Observaţie. Sistemul de unităţi electrice practice nu este legat în mod simplu cu unităţile fundamentale de lungime, massă şi timp ; de aceea nu există pentru ele formule de dimensiuni şi prin urmare nu ne putem servi de observarea relativă la transformarea măsurilor când se cunoaşte formula dimensiunilor.

Cu acest prilej observăm de asemenea că deşi unităţile electrostatice C. G. S. au formule de dimensiuni şi cele electromagnetice deasemenea dar o mărime care poartă acelaş nume în cele două sisteme nu are aceeaş definiţie şi (ca o consecinţă) nici aceleaş dimensiuni în ambele sisteme ; deci nici în acest caz nu putem aplicà observaţia relativă la dimensiuni pentru a calculà raportul între o unitate electrostatică şi una electrodinamică ci trebue să ne adresăm la metoda generală sau eventual la experienţă.

Incă un exemplu. Coeficientul de selfinducție se definește în sistemul electromagnetic C. G. S. prin egalitatea (formula)

$$E = -L\frac{dI}{dT} \text{ sau } L = -E.\frac{dT}{dI}$$

în care E sunt unități de potențial, dT sunt secunde și dI unități de intensitate (weberi). Vrem să trecem la sistemul practic:

Pentru asta ținem seamă că coeficientul de self în sistemul practic se definește prin aceeași formulă:

$$l = -e.\frac{dt}{di}$$

în care e sunt volți, dt sunt secunde și di sunt amperi.

Atunci vom scrie:

$$\frac{L}{l} = \frac{E}{e} \times \frac{dT}{dt} \times \left(\frac{dI}{di}\right)^{-1} = \frac{U_e}{U_E} \times \frac{U_t}{U_T} \times \frac{U_I}{U_i}$$

în loc de $\left(\frac{U_i}{U_I}\right)^{-1}$ am pus $\frac{U_I}{U_i}$ care este acelaș lucru).

Dar este cunoscut că o unitate electromagnetică de potențial face 10^{-8} volți; deci $\frac{U_e}{U_E} = 10^8$. Raportul $\frac{U_t}{U_T}$ este egal cu unu fiindcă unitatea de timp a rămas aceeaș (secunda); în fine e cunoscut că un weber face 10 amperi așa în cât $\frac{U_I}{U_i} = 10$. Avem deci:

$$\frac{L}{l} = \frac{10^8}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{10}{1} = 10^9 \text{ sau } l = \frac{L}{10^9}$$

Deci coeficientul de self în unități practice (în henry) se va calcula împărțind cu 10^9 coeficientul în unități electromagnetice.

Deci un henry (o unitate de self practică) valorează 10^9 unități electromagnetice.

* * *

Dar cu prilejul schimbărei unităților de măsură se mai pune și altă problemă. Fie iarăș formula în C. G. S. a forței centrifuge

$$f = m\frac{v^2}{r} \text{ (dyne, grame, } {}^{cm}/_{sec}\text{, cm.).}$$

Dacă socotim cu metrul, cu minutul, cu kilogramul-massă și cu kilogramul forță, formula mai poate rămâne aceeaș sau trebue modificată?

Zicem așa: în orice sistem de unități am lucra, forța va fi proporțională cu massa, cu iuțeala la patrat și invers proporțională cu raza cercului.

Deci formula nu poate fi decât $F = K.\frac{M.V^2}{R}$ (kiloforță, kilomassa, m/min, m).

în care K este un număr fix (pentru sistemul de unități ales) care rămâne de determinat. Pentru a-l determina scriem:

$$\frac{f^{dyne}}{F_{kilo}} = \frac{1}{K}\cdot\frac{m}{M}\cdot\frac{v^2}{V^2}\cdot\frac{R}{r} = \frac{1}{K}\cdot\frac{U_M}{U_m}\cdot\left(\frac{U_V}{U_v}\right)^2\cdot\left(\frac{U_r}{U_R}\right)$$

de unde $$K = \frac{U_M}{U_m} \cdot \left(\frac{U_V}{U_v}\right)^2 \cdot \left(\frac{U_r}{U_R}\right) \cdot \frac{F}{f}$$

sau de oarece $\frac{F}{f} = \frac{U_f}{U_F}$ urmează

$$K = \frac{U_M}{U_m} \cdot \left(\frac{U_V}{U_v}\right)^2 \cdot \left(\frac{U_r}{U_R}\right) \cdot \frac{U_f}{U_F}$$

Pentru a calcula $\left(\frac{U_V}{U_v}\right)^2$ ne ducem la definiția iuțelei (care este: iuțeala $= \frac{\text{lungime}}{\text{timp}}$) și deci vom avea

$$\frac{U_V}{U_v} = \frac{v}{V} = \frac{l}{L} \cdot \frac{T}{t} = \frac{U_L}{U_l} \cdot \frac{U_t}{U_T}$$

Insă 1 m. face 100 cm; deci $\frac{U_L}{U_l} = 100$; un minut face 60 secunde; deci

$$\frac{U_t}{U_T} = \frac{1}{60} \cdot \text{ Deci } \frac{U_V}{U_v} = 100 : 60 = \frac{5}{3} \text{ și } \left(\frac{U_V}{U_v}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

Apoi: kilogr. massă face 1000 gr. massă; deci

$$\frac{U_M}{U_m} = 1000 ; \quad \frac{U_r}{U_R} = \frac{cm}{m} = \frac{1}{100} ; \frac{U_f}{U_F} = \frac{dyna}{kilogr.} = \frac{1}{980.000}$$

(presupunând că ne aflăm într'un loc unde $g = 980\ ^{cm.}/_{sec.^2}$);

Așa dar: $$K = 1000 \times \frac{25}{9} \times \frac{1}{100} \times \frac{1}{980.000} = \frac{25}{9 \times 98000}$$

și deci formula va deveni în noul sistem de unități.

$$F = \left(\frac{25}{9 \times 98000}\right) \cdot \frac{MV^2}{R} \text{ (kilo, kilo, } ^m/_{min}, m).$$

Incă un exemplu. Fie formula

$$e = \frac{1}{2} mv^2 \text{ (ergi, grame, } ^{cm}/_{sec})$$

care arată că energia de mișcare în ergi este jumătate din produsul massei în grame prin patratul iuțelii în $^{cm}/_{sec}$. — (adică în C. G. S.).

Vrem să măsurăm însă lungimile cu metrul, timpul tot cu secunda, (deci iuțeala cu metrul pe secundă) și energia cu joule care este fixat așa că un joule face 10^7 ergi. Se pune întrebarea cum va fi formula:

Scriem: $$E \text{ (jouli)} = K . \frac{1}{2} MV^2$$

și căutăm pe K. Pentru aceasta scriem:

$$\frac{E}{e} = K \frac{M}{m} \cdot \left(\frac{V}{v}\right)^2$$

De unde $$K = \frac{E}{e} \cdot \frac{m}{M} \cdot \left(\frac{v}{V}\right)^2 = \frac{U_e}{U_E} \times \frac{U_M}{U_m} \times \left(\frac{U_V}{U_v}\right)^2$$

Insă $$\frac{U_e}{U_E} = \frac{erg}{joule} = 10^{-7}; \frac{U_M}{U_m} = 1000; \frac{U_V}{U_v} = \frac{U_L}{U_l} \cdot \frac{U_t}{U_T} = 100 . \frac{1}{1} = 100 ;$$

deci $\left(\frac{U_V}{U_v}\right)^2 = 100^2 = 10^4$; deci

$$K = 10^{-7} \times 1000 \times 10^4 = 1$$

Deci formula devine

$$E \text{ jouli} = \frac{1}{2} M V^2 \text{ (kilo, }^m/_{sec}).$$

Aşa dar formula din C.G.S. rămâne neschimbată dacă se socoteşte în metri, în secunde, în kilograme-massă şi în jouli.
